



TITLE:

# 流体モデルを考慮した浅水流における水面波動方程式 (非線形波動現象の数理とその応用)

AUTHOR(S):

新井, 宗之

---

CITATION:

新井, 宗之. 流体モデルを考慮した浅水流における水面波動方程式 (非線形波動現象の数理とその応用). 数理解析研究所講究録 2018, 2076: 10-19

ISSUE DATE:

2018-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/242069>

RIGHT:

## 流体モデルを考慮した浅水流における水面波動方程式

名城大学理工学部 新井宗之  
(468-8502 愛知県名古屋市中天白区塩釜口 1-501)

Muneyuki ARAI  
Faculty of Science and Technology, Meijo University

### 1. はじめに

山地河道における間欠的なサージ流下現象は、中国・雲南省で粘性土石流と呼ばれる土石流サージが 20 年以上前から観測されている<sup>1)</sup>。近年では、ヨーロッパアルプスでも通常の土石流流下で間欠的なサージが多く観測されてるようになってきている<sup>2)</sup>。著者らはこれらの間欠的なサージが、流れの不安定性に基づく転波列の一種として生成される場合のあることを示している<sup>3),4)</sup>。

転波列に関する研究は、すでに多くの研究がある。Dressler<sup>5)</sup> は、この転波列の生成条件を水面方程式の発散条件として示し、この領域の先駆的な研究を行った。初期の研究では解析の容易な層流を対象にしたが、Needham & Merkin<sup>6)</sup>、Merkin & Needham<sup>7)</sup> は乱流の流れを対象にした。日本では、石原・岩垣・岩佐<sup>8)</sup> が薄層流の転波列について検討した。五十嵐ら<sup>9)</sup> は転波列の発達過程や波長について検討した。また、Sandro<sup>10)</sup> は非ニュートン流体のダイラタント流体の転波列の検討をしている。Arai ら<sup>3),4)</sup> は、流動モデルの一般的な転波列生成条件を検討している。

一方、浅水流における波動性については、Kadomtsev-Petriashvili が表面張力を考慮した KdV 型の波動方程式を導き、Kadomtsev-Petriashvili 方程式あるいは K-P 方程式と呼ばれている<sup>11)</sup>。しかし、この方程式に対し底面の摩擦が重要であるとの Miles<sup>12)</sup> の指摘や長波についてこの方程式は有効でないという Hunter & VerdenBroeck<sup>13)</sup> の指摘などがある。新井ら<sup>14),15)</sup> は浅水流における長波と底面摩擦を考慮した波動方程式を検討している。

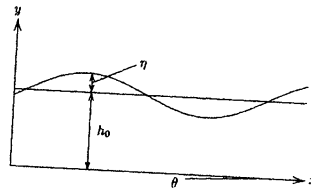


図-1 座標系

しかしながら、山地河道における間欠的な土石流サージのように非ニュートン流体を含めた流体モデルと浅水流の波動方程式の関係についてあまり検討されていない。本件究では、流体モデルの特性を表す運動量補正係数  $\beta$  と摩擦損失係数  $f'$  を含めた波動方程式を逡減摂動法を用いて導出し、 $\beta$  および  $f'$  がどのように波動方程式に関わっているのかを明らかにすることを目的としているものである。

### 2. 基礎方程式

傾斜水路上に生成される急激な水深変化を有するサージ流下現象を検討するための水面変動方程式（波動方程式）を得ることを目的としている。座標系を図-1 のように、流下方向を  $x$ 、その垂直方向（水深方向）を  $y$  とし、流体を一樣流体で非圧縮 ( $\text{div} \vec{v} = 0$ )、非回転 ( $\text{rot} \vec{v} = 0$ ) の関係より速度ポテンシャル  $\phi$  を導入すると、次式のラプラス方程式の関係がある。

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0. \quad (1)$$

ここに、微分表示を添え字で表し  $\partial^2 \phi / \partial x^2 = \phi_{xx}$  等とする（以下同じ）。

式(1)は、流体の非圧縮、非回転の条件により与えられる。しかしながら、支配方程式にラプラス方程式を用いることは流れ場をポテンシャル流れであるとしていることを意味している。

水底 ( $y = -h_0$ ) の境界条件は、水深方向 ( $y$  方向) の速度成分を  $v$  とすると、

$$v = \phi_x = 0, \quad (y = -h_0). \quad (2)$$

水面の変形と水面の水粒子の運動が一致する条件は、水深  $h_0$  からの水面の変動成分を  $\eta(x, t)$  とすると、 $D$  を微分記号、 $t$  を時間として、 $D(y - \eta)/Dt = 0$  である。 $y$  方向の流速  $v$  より、 $Dy/dt = v = \phi_y$ 、また、 $x$  方向の流速成分  $u$ 、 $dx/dt = u = \phi_x$  より、 $D\eta/Dt = \partial\eta/\partial t + \partial\eta/\partial x \cdot dx/dt = \eta_t + \eta_x \cdot \phi_x$  から、水面の変形と水粒子が一致する条件として次式が与えられる。

$$\phi_y - \eta_t - \phi_x \eta_x = 0, \quad (y = 0). \quad (3)$$

浅水域の湛水状態での水面変動の波動方程式の導出では、水面変動条件としてベルヌーイの式が用いられる。著者らは、この水面変動条件に浅水流の運動方程式を基にした式を用い、水面変動の波動方程式を得ている<sup>14),15)</sup>。しかし、流体モデルの違いは考慮していない。ここでは、流体モデルの特性を表す運動量補正係数  $\beta$  と摩擦損失係数  $f'$  を含めた水面変動条件として次式を用いる。

$$\begin{aligned} \phi_t + \frac{1}{2}(2\beta - 1)(\phi_x)^2 - g \sin \theta x + g \cos \theta h \\ + \frac{f'}{2} \frac{u_0}{h_0} \phi + (\beta - 1) \frac{u_0}{h_0} \int \phi_x \eta_x dx = 0 \end{aligned} \quad (4)$$

ここに、 $\beta$  : 運動量補正係数、 $g$  : 重力加速度、 $\theta$  : 水路勾配、 $h = h_0 + \eta$  : 水深、 $f'$  : 摩擦損失係数、 $u_0$  : 平均流速、 $h_0$  : 平均水深。式(4)の左辺第1項はポテンシャルの時間変動項、第2項は運動エネルギー、第3項は位置エネルギー、第4項は比エネルギー、第5項は底面摩擦による損失項、第6項は水深方向の流速分布が一定でない場合の水面変動による付加エネルギー項である。

ここで式(4)の導出について説明する。

急激な水面変動を伴う浅水流の1次元運動方程式および連続式は、一様な矩形断面水路における流れで、水深  $h$  に比して水路幅  $B$  が広い流れにおいて次式のようにある。

$$\begin{aligned} u_t + \beta u u_x - (\beta - 1) \frac{u}{h} \eta_t - g \sin \theta \\ + g \cos \theta h_x + \frac{f'}{2} \frac{u^2}{h} = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (6)$$

式(5)の左辺第1項は加速度項、第2項は移流項(対流項)、第3項は急激な水深変動に伴う応力項、第4項は重力による外力、第5項は水面勾配による作用力、第6項は底面摩擦による抵抗項である。

第6項の  $u^2/h$  について説明を加える。水深  $h$  および流速  $u$  を平均水深  $h_0$ 、平均流速  $u_0$  とその変動成分  $h'$ 、 $u'$  の和で表すと、 $h = h_0 + h'$ 、 $u = u_0 + u'$  である。変動成分  $h'$ 、 $u'$  が  $h_0$ 、 $u_0$  に比して小さくその2乗項を無視し、平均値と微小項の比の差非常に小さく無視出来るものとする、すなわち  $h'/h_0 - u'/u \ll 1$  とすると、 $u^2/h$  は次のように近似できる。

$$\frac{u^2}{h} \doteq \frac{u_0}{h_0} u \quad (7)$$

式(5)の左辺第3項に式(6)の連続式の関係を適応し、第6項に式(7)の関係を適用すると次式を得る。

$$\begin{aligned} u_t + \frac{1}{2}(2\beta - 1)(u^2)_x - g \sin \theta + g \cos \theta h_x \\ + \frac{f'}{2} \frac{u_0}{h_0} u + (\beta - 1) \frac{u_0}{h_0} u h_x = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

速度ポテンシャル  $\phi$  より,  $u = \phi_x$  を上式に適用し,  $\phi$  に関する  $x$  と  $t$  の連続性を考慮して  $x$  について積分すると次式を得る.

$$u_t + \frac{1}{2}(2\beta - 1)(\phi_x)^2 - g \sin \theta x + g \cos \theta h + \frac{f'}{2} \frac{u_0}{h_0} \phi + (\beta - 1) \frac{u_0}{h_0} \int \phi_x h_x dx = E_0 \quad (9)$$

ここに,  $E_0$  は積分定数である.  $E_0$  は基準となるポテンシャルを表し, 初期の条件として  $E_0 = 0$  を与えると前述の式 (4) となる.

### 3. 逓減摂動法による波動方程式の導出

#### 3.1 無次元基礎方程式と摂動展開

代表長さを平均水深  $h_0$ , 代表流速を Gerdner-Morikawa(G-M) 変換

$$\xi = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x - v_{p0}t), \quad \tau = \epsilon^{\frac{3}{2}}t \quad (10)$$

における位相速度パラメータ  $v_{p0}$  とする.  $\epsilon$  は摂動展開における微小パラメータである. これより無次元量を次のように定義し, 無次元量にプライムを付す.

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi/(h_0 v_{p0}), \quad x' = x/h_0, \quad y' = y/h_0, \\ t' &= (v_{p0}/h_0)t, \quad \eta' = \eta/h_0. \end{aligned} \quad (11)$$

これより,  $\xi, \tau$  の無次元量  $\xi', \tau'$  は次式のようなである.

$$\xi' = \epsilon^{\frac{1}{2}}(x' - t'), \quad \tau' = \epsilon^{\frac{3}{2}}t' \quad (12)$$

これらより式 (1)~式 (4) の基礎方程式の無次元表示は次式のようなである.

$$\phi'_{x'x'} + \phi'_{y'y'} = 0, \quad (13)$$

$$\phi'_{y'} = 0, \quad (y' = -1), \quad (14)$$

$$-\phi'_{y'} + \eta'_{t'} + \phi'_{x'}\eta'_{x'} = 0, \quad (y' = 0), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \phi'_{t'} + \frac{1}{2}(2\beta - 1)(\phi'_{x'})^2 - c_0'^2 \tan \theta x' \\ + c_0'^2(1 + \eta') + \frac{f'}{2}u_0'c_0'\phi' \\ + (\beta - 1)u_0'c_0' \int \phi'_{x'}\eta'_{x'} dx' = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

ここに,

$$u_0' = u_0/c_0, \quad c_0' = c_0/v_{p0}, \quad c_0 = \sqrt{gh_0 \cos \theta}. \quad (17)$$

平均水深  $h_0$  からの変動量  $\eta$  および速度ポテンシャル  $\phi$  の摂動展開は, 無次元量を

$$\begin{aligned} \eta' &= \eta/h_0, \quad \eta'^{(1)} = \eta^{(1)}/h_0, \quad \eta'^{(2)} = \eta^{(2)}/h_0, \\ &\dots, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \phi' &= \phi/(h_0 v_{p0}), \quad \phi'^{(1)} = \phi^{(1)}/(h_0 v_{p0}), \\ \phi'^{(2)} &= \phi^{(2)}/(h_0 v_{p0}), \quad \dots \end{aligned} \quad (19)$$

と定義すると,  $\eta', \phi'$  の無次元摂動展開として

$$\eta' = \epsilon \eta'^{(1)}(\xi', \tau') + \epsilon^2 \eta'^{(2)}(\xi', \tau') + \dots, \quad (20)$$

$$\phi' = \epsilon^{\frac{1}{2}} \phi'^{(1)}(\xi', y', \tau') + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi'^{(2)}(\xi', y', \tau') + \dots \quad (21)$$

と表される。また、 $y' = 0$  の近傍  $\eta'$  における  $\phi'$  の Boussinesq による Taylor 展開は、

$$\begin{aligned}\phi'(\xi', \eta', \tau') &= \phi'(\xi', 0, \tau') + \eta' \phi'(\xi', 0, \tau')_{y'} \\ &\quad + \frac{\eta'^2}{2} \phi'(\xi', 0, \tau')_{y'y'} + \dots\end{aligned}\quad (22)$$

である。これらより、無次元基礎方程式の摂動展開は次のように表せる。

式 (13) のラプラス方程式は

$$\begin{aligned}\phi'_{x'x'} + \phi'_{y'y'} &= \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi'_{\xi'\xi'}^{(1)} + \epsilon^{\frac{5}{2}} \phi'_{\xi'\xi'}^{(2)} + \epsilon^{\frac{7}{2}} \phi'_{\xi'\xi'}^{(3)} + \dots \\ &\quad + \epsilon^{\frac{1}{2}} \phi'_{y'y'}^{(1)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi'_{y'y'}^{(2)} + \epsilon^{\frac{5}{2}} \phi'_{y'y'}^{(3)} + \dots \\ &= 0.\end{aligned}\quad (23)$$

式 (14) の水底条件は、

$$\begin{aligned}\phi'_{y'} &= \epsilon^{\frac{1}{2}} \phi'_{y'}^{(1)} + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi'_{y'}^{(2)} + \epsilon^{\frac{5}{2}} \phi'_{y'}^{(3)} + \dots \\ &= 0.\end{aligned}\quad (24)$$

式 (15) の水面条件は、

$$\begin{aligned}-\phi'_{y'} + \eta'_{\tau'} + \phi'_{x'} \eta'_{x'} &= -\phi'_{y'} - \epsilon^{\frac{1}{2}} \eta'_{\xi'} + \epsilon^{\frac{3}{2}} \eta'_{\tau'} + \epsilon \phi'_{\xi'} \eta'_{\xi'} \\ &= -\epsilon^{\frac{1}{2}} \phi'_{y'}^{(1)} - \epsilon^{\frac{3}{2}} \eta'^{(1)}_{\phi'_{y'y'}} - \epsilon^{\frac{5}{2}} \eta'^{(2)}_{\phi'_{y'y'}} - \dots \\ &\quad - \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi'_{y'}^{(2)} - \epsilon^{\frac{5}{2}} \eta'^{(1)}_{\phi'_{y'y'}} - \epsilon^{\frac{7}{2}} \eta'^{(2)}_{\phi'_{y'y'}} - \dots \\ &\quad - \epsilon^{\frac{5}{2}} \phi'_{y'}^{(3)} - \epsilon^{\frac{7}{2}} \eta'^{(1)}_{\phi'_{y'y'}} - \epsilon^{\frac{9}{2}} \eta'^{(2)}_{\phi'_{y'y'}} - \dots \\ &\quad - \epsilon^{\frac{3}{2}} \eta'_{\xi'}^{(1)} - \epsilon^{\frac{5}{2}} \eta'_{\xi'}^{(2)} - \epsilon^{\frac{7}{2}} \eta'_{\xi'}^{(3)} - \dots \\ &\quad + \epsilon^{\frac{5}{2}} \eta'_{\tau'}^{(1)} + \epsilon^{\frac{7}{2}} \eta'_{\tau'}^{(2)} + \epsilon^{\frac{9}{2}} \eta'_{\tau'}^{(3)} + \dots \\ &\quad + \epsilon^{\frac{5}{2}} \phi'_{\xi'}^{(1)} \eta'_{\xi'}^{(1)} + \epsilon^{\frac{7}{2}} \phi'_{\xi'}^{(1)} \eta'_{\xi'}^{(2)} + \epsilon^{\frac{7}{2}} \phi'_{\xi'}^{(2)} \eta'_{\xi'}^{(1)} \\ &\quad + \epsilon^{\frac{9}{2}} \phi'_{\xi'}^{(2)} \eta'_{\xi'}^{(2)} + \dots = 0.\end{aligned}\quad (25)$$

式 (16) の水面変動条件は、

$$\begin{aligned}\phi'_{\tau'} + \frac{1}{2}(2\beta - 1)(\phi'_{x'})^2 - c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 + c_0'^2 \eta' &+ \frac{f'}{2} u_0' c_0' \phi' + (\beta - 1) u_0' c_0' \int \phi'_{x'} \eta'_{x'} dx \\ &= -\epsilon \phi'_{\xi'}^{(1)} - \epsilon^2 \phi'_{\xi'}^{(2)} - \epsilon^3 \phi'_{\xi'}^{(3)} - \dots \\ &\quad + \epsilon^2 \phi'_{\tau'}^{(1)} + \epsilon^3 \phi'_{\tau'}^{(2)} + \epsilon^4 \phi'_{\tau'}^{(3)} + \dots \\ &\quad + \frac{1}{2}(2\beta - 1) \left\{ \epsilon^2 \left( \phi'_{\xi'}^{(1)} \right)^2 + 2\epsilon^3 \phi'_{\xi'}^{(1)} \phi'_{\xi'}^{(2)} \right. \\ &\quad \left. + \epsilon^4 \left( \phi'_{\xi'}^{(2)} \right)^2 + \dots \right\} \\ &\quad - c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 \\ &\quad + c_0'^2 \left( \epsilon \eta'^{(1)} + \epsilon^2 \eta'^{(2)} + \epsilon^3 \eta'^{(3)} + \dots \right) \\ &\quad + \frac{f'}{2} u_0' c_0' \left\{ \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \epsilon^{\frac{1}{2}} \phi'^{(1)} + \left( \epsilon^{\frac{3}{2}} \eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{5}{2}} \eta'^{(2)} + \dots \right) \phi'_{y'}^{(1)} + \dots \\
& + \epsilon^{\frac{3}{2}} \phi'^{(2)} + \left( \epsilon^{\frac{5}{2}} \eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{7}{2}} \eta'^{(2)} + \dots \right) \phi'_{y'}^{(2)} + \dots \\
& + \epsilon^{\frac{5}{2}} \phi'^{(3)} + \left( \epsilon^{\frac{7}{2}} \eta'^{(1)} + \epsilon^{\frac{9}{2}} \eta'^{(2)} + \dots \right) \phi'_{y'}^{(3)} + \dots \} \\
& + (\beta - 1) u_0' c_0' \left\{ \epsilon^2 \int \phi'_{\xi'}^{(1)} \eta'_{\xi'}^{(1)} d\xi' \right. \\
& + \epsilon^3 \int \phi'_{\xi'}^{(1)} \eta'_{\xi'}^{(2)} d\xi' + \epsilon^3 \int \phi'_{\xi'}^{(2)} \eta'_{\xi'}^{(1)} d\xi' \\
& \left. + \epsilon^4 \int \phi'_{\xi'}^{(2)} \eta'_{\xi'}^{(2)} d\xi' + \dots \right\} = 0
\end{aligned} \tag{26}$$

である.

### 3.2 摂動展開の $\epsilon$ の次数別方程式と波動方程式の導出

基礎方程式の摂動展開方程式を満足する必要条件は、各方程式において  $\epsilon$  の次数別の項の和がそれぞれ 0 となることである. したがって、 $\epsilon$  の次数別の関係式は次のようである.

1)  $O(\epsilon^0)$  次の項: 式 (26) において  $\epsilon^0$  の項の和は  $-c_0'^2 \tan \theta x' + c_0'^2 = 0$  より

$$\tan \theta = \frac{1}{x'}. \tag{27}$$

2)  $O(\epsilon^{\frac{1}{2}}, \epsilon^1)$  次の項:

$\epsilon^{1/2}$  および  $\epsilon^1$  のオーダーの同次方程式は、式 (23)~(26) より次式の関係がある. 式 (23) より

$$\phi'_{y'y'}^{(1)} = 0, \tag{28}$$

式 (24) より

$$\phi'_{y'}^{(1)} = 0, \quad (y' = -1), \tag{29}$$

式 (25) より

$$\phi'_{y'}^{(1)} = 0, \quad (y' = 0), \tag{30}$$

式 (26) より

$$-\phi'_{\xi'}^{(1)} + c_0'^2 \eta'^{(1)} + \frac{f'}{2} u_0' c_0' \phi'^{(1)} = 0. \tag{31}$$

2)  $O(\epsilon^{3/2}, \epsilon^2)$  次の項:

$\epsilon^{3/2}$  および  $\epsilon^2$  のオーダーの同次方程式は、式 (23) より

$$\phi'_{\xi'\xi'}^{(1)} + \phi'_{y'y'}^{(2)} = 0, \tag{32}$$

式 (24) より

$$\phi'_{y'}^{(2)} = 0, \quad (y' = -1), \tag{33}$$

式 (25) より

$$-\eta'^{(1)} \phi'_{y'y'}^{(1)} - \phi'_{y'}^{(2)} - \eta'_{\xi'}^{(1)} = 0, \quad (y' = 0), \tag{34}$$

式 (26) より

$$\begin{aligned}
& -\phi'_{\xi'}^{(2)} + \phi'_{\tau'}^{(1)} + \frac{1}{2} (2\beta - 1) \left( \phi'_{\xi'}^{(1)} \right)^2 \\
& c_0'^2 \eta'^{(2)} + \frac{f'}{2} u_0' c_0' \left( \eta'^{(1)} \phi'_{y'}^{(1)} + \phi'^{(2)} \right) \\
& + (\beta - 1) u_0' c_0' \int \phi'_{\xi'}^{(1)} \eta'_{\xi'}^{(1)} d\xi' = 0.
\end{aligned} \tag{35}$$

3) $O(\epsilon^{5/2}), \epsilon^3$  次の項:

$\epsilon^{5/2}$  および  $\epsilon^3$  のオーダーの同次方程式は、式 (23) より

$$\phi'_{\xi'\xi'} + \phi'_{y'y'} = 0, \quad (36)$$

式 (24) より

$$\phi'_{y'} = 0, \quad (y' = -1), \quad (37)$$

式 (25) より

$$\begin{aligned} & -\eta'^{(2)}\eta'^{(1)}_{y'y'} - \eta'^{(2)}_{y'y'} - \phi'^{(3)}_{y'} - \eta'^{(2)}_{\xi'} \\ & + \eta'^{(1)}_{\tau'} + \phi'^{(1)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'} = 0, \quad (y' = 0), \end{aligned} \quad (38)$$

式 (26) より

$$\begin{aligned} & -\phi'^{(3)}_{\xi'} + \phi'^{(2)}_{\tau'} + (2\beta - 1)\phi'^{(1)}_{\xi'}\phi'^{(2)}_{\xi'} + c_0'^2\eta'^{(3)} \\ & + \frac{f'}{2}u_0'c_0' \left( \eta'^{(2)}\phi'^{(1)}_{y'} + \eta'^{(1)}\phi'^{(2)}_{y'} + \phi'^{(3)} \right) \\ & + (\beta - 1)u_0'c_0' \left\{ \int \phi'^{(1)}_{\xi'}\phi'^{(2)}_{\xi'} d\xi' \right. \\ & \left. + \int \phi'^{(2)}_{\xi'}\eta'^{(1)}_{\xi'} d\xi' \right\} = 0. \end{aligned} \quad (39)$$

ここでは、水面変動  $\eta'$  に関する関係式を得ることを目的としていることより、上式の式 (27) から式 (39) より  $\eta'^{(1)}$  について解くものである。式 (27) は水路勾配の関係を表しているもので  $\eta'^{(1)}$  の導出に直接この関係を用いていない。一方、 $\eta'^{(1)}$  の導出については式 (28) から式 (38) の式を用いて導出することができ、式 (39) は用いていない。

また、式 (31) は次のような近似を行う。式 (31) は項を移項すると、

$$\phi'^{(1)}_{\xi'} - \frac{f'}{2}u_0'c_0'\phi'^{(1)} = c_0'^2\eta'^{(1)} \quad (40)$$

であり、 $\phi'$  に関する  $\xi'$  の 1 階微分方程式と考えると、上式の  $\phi'^{(1)}$  を  $\xi'$  について解けば

$$\begin{aligned} \phi'^{(1)} &= e^{-h} \left[ \int e^{h} c_0'^2 \eta'^{(1)} d\xi' + C \right] \\ \text{ここに、} h &= \int \left( -\frac{f'}{2}u_0'c_0' \right) d\xi' = -\frac{f'}{2}u_0'c_0'\xi', \\ &\text{ただし、} C \text{ は積分定数,} \end{aligned}$$

である。ここで対象とするような流れにおいて摩擦損失係数  $f'$  は  $f' \ll 1$  である。 $u_0'$  は、後述するように G-M 変換の速度パラメータ  $v_{p0}$  が長波の波速の場合、Froude 数に相当し、ここでは  $10 > u_0' \geq 1$  程度の流れを対象にする。 $c_0'$  も、同様に  $v_{p0}$  が長波の波速あるいはその近傍で  $c_0' \approx 1$  程度である。 $\xi'$  は 1 波長の解で  $\xi = 0 \sim 1$  である。このことより、 $(f'/2)u_0'c_0'\xi' \leq 1$  であり、 $e^{|h|} \approx 1$  と考えることができる。これより式 (40) の近似解は

$$\phi'^{(1)} \approx \int c_0'^2 \eta'^{(1)} d\xi' + C$$

である。上式の  $\xi'$  の導関数を取ると、式 (31) の近似式として次式を得る。

$$\phi'^{(1)}_{\xi'} = c_0'^2\eta'^{(1)} \quad (41)$$

上式は式 (31) の各項のオーダー比較による近似式を表している。これより、式 (31) の代わりに式 (41) を用いて  $\eta'^{(1)}$  の関係式を導出する。

以上の関係式から  $\eta'^{(1)}$  の関係式を導き、 $\eta'^{(1)}$  の導出結果だけを記せば下記のようなのである。ただし、 $\eta'^{(1)}$  を  $\eta'$  と記している。

$$\begin{aligned} \eta'_{\tau'} + \frac{1}{2} \left\{ (2\beta + 1)c_0'^2 + (\beta - 1)u_0'c_0' \right\} \eta' \eta'_{\xi'} \\ - \frac{1}{4} \left( \frac{1}{c_0'^2} - \frac{1}{2} \right) f' u_0' c_0' \eta'_{\xi' \xi'} \\ + \frac{1}{2} \left( \frac{2 + c_0'^4}{2c_0'^2} - \frac{3}{2} \right) \eta'_{\xi' \xi' \xi'} = 0. \end{aligned} \quad (42)$$

得られた式 (42) は KdV-Burgers 型の方程式である。この結果によると流れの流速分布形の影響を示す運動量補正係数  $\beta$  は第 2 項の非線形項に関係し、流れの抵抗を表す摩擦損失係数  $f'$  は第 3 項の散逸項に関係している。また、第 4 項の分散項の係数には  $\beta$  や  $f'$  がここでの摂動展開の近似では含まれていないため、それらの影響が少ないことを示している。

#### 4. 考察

抵抗則の違いによるサージ波形形成の違いについて検討する。運動量補正係数  $\beta$  は、層流の場合  $\beta = 1.2$ 、乱流の場合で  $\beta = 1.1$  程度であり、多くの浅水流においては  $\beta = 1.0 \sim 1.2$  である。流速分布形が一樣な場合  $\beta = 1$  であり、式 (42) の左辺第 2 項の非線形項の係数はこの場合  $(3/2)c_0'^2$  である。不連続的なサージ状の水面波形を形成するのは位相速度  $v_{p0}$  が長波の波速  $c_0$  の状態の場合であり、このときこの非線形項の係数の  $\beta = 1$  の場合との比は、

$$r_\beta = \frac{1}{3} \{ (2\beta + 1) + (\beta - 1)u_0' \} \quad (43)$$

である。この場合、 $v_{p0} = c_0$  で  $u_0'$  は Froude 数を意味している。平均水深  $h_0$ 、平均流速  $u_0$  による Froude 数の違いを示している。この結果から  $\beta = 1 \sim 1.2$  の範囲で非線形項の係数は、 $\beta$  と同程度の変化を示すもので  $\beta$  の影響は少ないといえる。 $\beta \neq 1$  の場合、 $u_0'$  (Froude 数) の影響が生じ、非線形項の係数の値は、 $\beta$  の増加において  $r_\beta$  の増加が少ないことを示している。しかしながらいずれの場合も  $\beta$  の影響は少ないといえる。

前述のように、位相速度  $v_{p0}$  が長波波速  $c_0$  上で不連続的な水深変化を有する特有な波形形成をすることから<sup>15)</sup>、 $v_{p0} = c_0$  において  $c_0' = 1$  であり、式 (42) は次式の関係となる。

$$\eta'_{\tau'} + \frac{1}{2} \{ (2\beta + 1) + (\beta - 1)u_0' \} \eta' \eta'_{\xi'} - \frac{1}{8} f' u_0' \eta'_{\xi' \xi'} = 0 \quad (44)$$

左辺第 3 項の摩擦損失係数  $f'$  を、ここでは定数として取り扱っている。平均水深  $h_0$ 、平均流速  $u_0$  による  $f'$  は流体モデルによりそれぞれ対応する関係式を与えることができるが、ここでは抵抗則の違いの傾向を考察するため、Vedernikov 型の抵抗則を用いる。この抵抗則は、Chezy 式、Manning 式、層流の流速式等を一般化したもので、流速  $U$  を次式のように与えている。

$$U^a = r_v R^{(1+b)} \sin \theta. \quad (45)$$

ここに、 $U$ : 流速、 $R$ : 径深、 $r_v$ : 係数、 $a, b$ : 定数。定数  $a, b$  は、Chezy 式の場合  $a = 2, b = 0$ 、Manning 式の場合、 $a = 2, b = 1/3$ 、層流の場合  $a = 1, b = 1$  で表される。摩擦損失係数  $f'$  を式 (45) を用いて表すと次式のようなのである。

$$\frac{f'}{2} = \frac{u_*^2}{u_0^2} = r_v^{-\frac{2}{a}} g (\sin \theta)^{1-\frac{2}{a}} h_0^{1-\frac{2(1+b)}{a}} \quad (46)$$

ここに、 $u_* = \sqrt{gh_0 \sin \theta}$ 、 $R \doteq h_0$ 。

式 (44) に式 (46) の関係を適応し、式を変形すると次のようである。

$$\eta'_{\tau'} + a_1 \eta' \eta'_{\xi'} = \mu \eta'_{\xi' \xi'}, \quad (47)$$



ここに,

$$a_1 = \frac{1}{2} \{ (2\beta + 1) + (\beta - 1)u_0' \}, \quad (48)$$

$$\mu = \frac{1}{8} f' u_0' = \frac{1}{4} r v^{-\frac{2}{\alpha}} g(\sin \theta)^{1-\frac{2}{\alpha}} h_0^{1-\frac{2(1+b)}{\alpha}} u_0' \quad (49)$$

式 (47) は Burgers 方程式の一つである.

$\beta$  と  $f'$  に関係するので簡単に説明をする. Burgers 方程式の解法は確立されていて, コール・ホップ (Cole-Hopf) 変換により, 非線形の Burgers 方程式を線形の熱伝導方程式に変換し, この熱伝導方程式 (拡散方程式) 上で解を求め, その解を再度コール・ホップ変換の逆変換で元の Burgers 方程式の解をもとめるものである. コール・ホップ変換は,  $z(\xi', \tau')$  を導入すると,

$$\eta' = -\frac{2}{a_1} \mu (\ln z)_{\xi'} = -\frac{2}{a_1} \mu \frac{1}{z} z_{\xi'} \quad (50)$$

である. このコール・ホップ変換を適応すると, 式 (47) は, 次式の熱伝導方程式となる.

$$z_{\tau'} = \mu z_{\xi'} \quad (51)$$

上式は, 式 (47) の  $a_1$  が無くなり,  $\mu$  だけが残ることになる. このことは熱伝導方程式において  $\mu$  が熱等の伝導率, 拡散係数を表しており, ここでの場合, 摩擦損失係数  $f'$  が初期状態の形状から変形の変化率を示していることを意味していることになる.

運動量補正係数  $\beta$ , 摩擦損失係数  $f'$  との関係でシンプルな解析例を述べる. 周期  $2\ell$  ( $-\ell \leq \xi' \leq \ell$ ) における固定境界条件, 正弦波初期条件による解析解について述べる. 境界条件は,  $\xi' = -\ell$ ,  $\xi' = \ell$  でそれぞれ  $\eta' = 0$  とする. すなわち,

$$\eta'(-\ell, \tau') = 0, \quad \eta'(\ell, \tau') = 0. \quad (52)$$

初期条件は, 振幅  $a_0$ , 周期  $T = 2\ell$  の正弦波とし,

$$\eta'(\xi', 0) = \frac{a_0}{2} \sin \frac{2\pi\xi'}{T} = \frac{a_0}{2} \sin \frac{\pi\xi'}{\ell} \quad (53)$$

とする.

式 (53) の初期条件を式 (50) でコール・ホップ変換すると次式のようなである.

$$z(\xi', 0) = \exp \left[ \frac{\ell r}{\pi} \cos \frac{\pi\xi'}{\ell} + \frac{\ell r}{\pi} \right] \quad (54)$$

$$\text{ここに, } r = \frac{1}{2 a_1 \mu} \frac{a_0}{2} \quad (55)$$

境界条件は, 式 (54) の  $\xi' = -\ell$ ,  $\xi' = \ell$  で与えられ,

$$\eta(-\ell, 0) = \eta(\ell, 0) = 1 \quad (56)$$

である. 式 (54), 式 (56) の初期条件, 境界条件により, フーリエ級数展開をもちいて式 (51) の熱伝導方程式を解き, コール・ホップ変換の逆変換を用いて式 (47) の Burgers 方程式の解を求めると次式のようなである.

$$\begin{aligned} \eta'(\xi', \tau') = & \left[ \frac{a_0}{2r} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n\pi}{\ell^2} \int_{-\ell}^{\ell} \exp \left( \frac{\ell r}{\pi} \cos \frac{\pi v}{\ell} + \frac{\ell r}{\pi} \right) \cos \frac{n\pi v}{\ell} dv \right\} \right. \\ & \left. \cdot \sin \left( \frac{n\pi\xi'}{\ell} \right) e^{-\lambda_n^2 \tau'} \right] \times \left[ e^{\frac{\ell r}{\pi}} J_0 \left( \frac{\ell r}{\pi} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{\ell} \int_{-\ell}^{\ell} \exp\left(\frac{\ell r}{\pi} \cos \frac{\pi v}{\ell} + \frac{\ell r}{\pi}\right) \cos \frac{n\pi v}{\ell} dv \right\} \\
& \cdot \cos\left(\frac{n\pi \xi'}{\ell}\right) e^{-\lambda_n^2 \tau'} \Bigg]^{-1}
\end{aligned} \quad (57)$$

ここに,

$$\begin{aligned}
\lambda_n &= \frac{\sqrt{\mu} n \pi}{\ell}, \quad (n = 1, 2, \dots), \\
J_0() &: \text{第1種ベッセル関数}
\end{aligned} \quad (58)$$

式 (57) は時間発展  $\tau'$  にともなう水面波形  $\eta'$  の変形過程を表すものである。初期の振幅の大きさ  $a_0$  や周期  $T = 2\ell$  は理論的に定めることができないことから、計算例として、 $a_0 = 1$ ,  $\ell = 1$  として検討する。また、時間発展にともなう  $\eta'$  の変形には限界があり、それ以降の時間発展ではその形状が保持されるものとされている。図-2 に  $\tau' = 2$ ,  $r = 5, 30, 35$  の場合を示している。

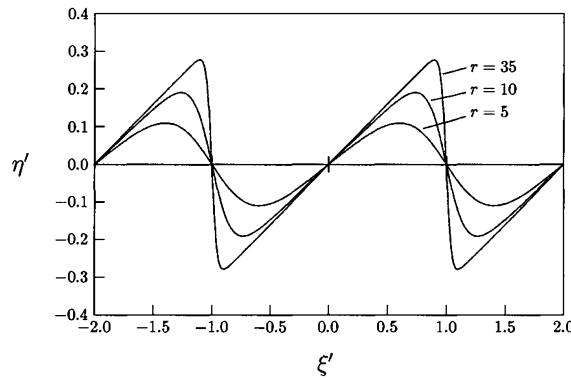


図-2  $\eta'(\xi', \tau')$  の計算例 ( $a_0 = 1$ ,  $\ell = 1$ ,  $\tau' = 2$ ,  $r = 5, 30, 35$ )

横軸は  $\xi'$ , 縦軸は  $\eta'$  である。図中の丸みを帯びた波形は  $r = 5$  の場合で、三角波形は  $r = 30, 35$  の場合の計算結果である。 $r$  が 30 を超えると波形の変化は少ない。 $r$  は式 (55) に示すように、 $a_1$ ,  $\mu$  に関係している。 $a_1$ ,  $\mu$  は式 (48), (49) に示すように、 $\beta$ ,  $f'$  に関係している。したがって、 $r$  が小さい場合は、 $a_1$ ,  $\mu$  が大きい場合で、逆に  $r$  が大きい場合は、 $a_1$ ,  $\mu$  が小さい場合である。すなわち、摩擦損失係数  $f'$  が小さい場合は、同じ無次元時間発展  $\tau'$  において急激な水深変化を有する三角波形となることを示している。この解析例のように、流体モデルの違いによる影響は、流下に伴う流体の変形率あるいはエネルギー散逸の大小が影響し、その時間発展にかかわる波形の変形過程に大きな影響を与えることを意味している。

## 5. 結言

傾斜水路における浅水流の流下にともなう間欠性サージ生成に関する水面変動の波動方程式の導出を示した。流れの流動モデルの違いを示す運動量補正係数  $\beta$ , 摩擦損失係数  $f'$  を含めた KdV-Burgers 型の波動方程式として示した。導出されて波動方程式で、不連続の水深変化を形成する波形変形の条件となる Burgers 方程式の解の具体例を示して  $\beta$  と  $f'$  との関係を示し、流体モデルの違いが時間発展の過程で形成される波形変形過程に影響することを示した。

## 参考文献

- 1) Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, and Institute of Mountain Hazards and Environment, Chinese Academy of Sciences and Ministry of Water Conservancy: Japan-China Joint Research on the Mechanism and the Countermeasures for the Viscous Debris Flow, 206p., 1999.

- 2) Huebl J. and Kaitna R.: Sediment delivery from the Latten-bach catchment by debrisflows and debris flows, *Abstracts of European Geosciences Union General Assembly 2010*, EGU2010-10585, 2010.5.
- 3) 新井宗之, 水山高久: 高濃度泥流サージの生成機構と流動モデルに関する研究, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.67, No.3, pp.92-100, 2011.
- 4) Arai M., Huebl J. and Kaitna R.: Occurrence conditions of roll waves for three grain-fluid models and comparison with results from experiments and field observation. *Geophysical Journal International*, Vol.195, Issue 3, pp.1464-1480 (doi:10.1093/gji/ggt352), 2013.
- 5) Dressler, R. F.: Mathematical solution of the problem of roll-waves in inclined open channels, *Communication on Pur and Applied Mathematics*, Vol.II, No.2/3, 1949.
- 6) Needham, D. J. and Merkin, J. H.: On roll waves down an open inclined channel, *Proc. R. Soc. London*, A394, pp.259-278, 1984.
- 7) Merkin, J. H. and Needham, D. J.: An infinite period bifurcation arising in roll waves down an open inclined channel, *Proc. R. Soc. London*, A405, pp.103-116, 1986.
- 8) 石原藤次郎, 岩垣雄一, 岩佐義朗: 急傾斜上の層流における転波列の理論-薄層流に関する研究 (第5報)-, 土木学会論文集, 第19号, pp.46-57, 1954.4.
- 9) 五十嵐章, 泉典洋, 細田尚: 転波列の発達過程, 水工学論文集, 土木学会, 第48巻, pp.463-468, 2004.2.
- 10) Sandro, L.: Roll waves on a shallow layer of a dilatant fluid, *European Journal of Mechanics B/Fluids*, 30, pp.57-67, 2011.
- 11) Kadomtsev, B. B. and Petviashvili, V. L.: On the stability of solitary waves in weakly dispersive media, *Doki. Akad. Nauk. SSSR*, 192, 753-6(1970), *Sov. Phys. Dok.*, 15, 539-41, 1970.
- 12) Miles, J. W.: Korteweg-de Vries equation modified by viscosity, *Phys. Fluids*, 19, 1063, 1976.
- 13) Hunter, J. K. and Vanden-Brock, J. M.: Solitary and periodic gravity-capillary waves of finite amplitude, *J. Fluid Mech.*, 134, 205-19, 1983a.
- 14) 新井宗之, 安田孝志, 中川一: 山地河道における浅水流に関する波動方程式の導出とその解析解の検討, 土木学会論文集 B1(水工学), Vol.69, No.4, I961-I966. 2013.
- 15) Arai, M.: Wave equation and Some solutions on intermittent debris flow, *International Journal of Erosion Control Engineering*, Vol.10, No.1, pp.39-46, 2017.